

Table des matières

- I.** EXERCICE N° 1 : PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE ET PRODUIT VECTORIEL
II. EXERCICE N° 2 : NOMBRES COMPLEXES .
III. EXERCICE N° 3 : PROBABILITE
IV. EXERCICE N° 4 : EQUATION DIFFERENTIELLE – FONCTION EXPONENTIELLE ET SUITE DE LA FORME $u_{n+1} = f(u_n)$.

01

Dans l'espace $(\mathcal{E})$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère :

- Les deux points $A(3, 4, 2)$ et $B(2, 2, 4)$ et $C(2, 4, 0)$ et $\Omega(2, 2, -2)$.

01.

..

- Déterminer les coordonnées du vecteur : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Est-ce que les points A et B et C sont alignés .
- Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .
- Donner une équation cartésienne du plan (Q) passant par Ω et parallèle au plan (ABC) .
- Calculer : la surface du triangle ABC .

02.

..

On considère la droite (D) dont un système d'équations est $\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{2} = -5-z$.

- Montrer que la droite (D) est orthogonale au plan (ABC) .
- Déterminer les coordonnées du point H intersection de (D) et (ABC) .

03.

..

- Calculer la distance du point Ω à la droite (D) .
- Déterminer l'équation cartésienne du sphère (S) de centre Ω et la droite (D) est tangente au sphère (S) .
- Déterminer les coordonnées du point K le point de de la tangente de (D) et le sphère (S) .

04.

..

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC) .
- Calculer la distance d du point Ω au plan (ABC) .
- En déduit que le plan (ABC) coupe le sphère suivant un cercle (Γ) .
- Déterminer R_Γ le rayon de (Γ) . Puis les coordonnées du point I_Γ centre de (Γ) .
- Déterminer la nature de l'intersection de (S) et (Q) et on détermine les éléments caractéristiques de l'intersection .

02

01.

..

Dimanche 6 mai 2018

06/05/2018 23:49:05

a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 6z + 12 = 0$.

b. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + 6y' + 12y = 0$.

02. On considère le polynôme suivant : $P(z) = z^3 + 4z^2 - 24$ dont z est un complexe.

a. Calculer : $P(2)$.

b. Déterminer a et b de $\mathbb{R}$ tel que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a : $P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $P(z) = 0$.

03. Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$; unité de mesure est 2 cm ; on considère les points A et B et C et leurs affixes respectivement $a = -3 + i\sqrt{3}$ et $b = -3 - i\sqrt{3}$ et $c = i2\sqrt{3}$.

a. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : a^n est un nombre réel pur.

b. Montrer que : $\frac{b}{a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$; puis on déduit la nature du triangle OAB.

04. On considère la translation t qui transforme le point A au point B. Donner l'écriture complexe de la translation t .

a. Déterminer l'affixe du point D image du point C par la translation t .

b. Soit I le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les deux vecteurs $\vec{IA}$ et $\vec{IC}$ sont orthogonaux.

05. On considère dans le plan complexe (P) la transformation h qui transforme tout point M d'affixe z au point M' d'affixe z' tel que : $z' = 2z - 3i$.

a. Montrer que h est une homothétie et on détermine l'affixe de son centre Ω et son rapport k .

b. Déterminer (C') l'image du cercle (C) de centre A et de rayon 3 par l'homothétie h .

03

Un amateur de la chasse utilise deux catégories de cartouches un on le désigne par A et l'autre par B.

- Probabilité tel que le chasseur atteint son but en utilisant cartouche A est $\frac{8}{10}$.
- Probabilité tel que le chasseur atteint son but en utilisant cartouche B est $\frac{6}{10}$.

1^{ère} expérience :

- Le chasseur utilise deux cartouches de catégorie A l'une après l'autre cartouche pour atteindre son but.
- On considère la variable aléatoire X définie par « le nombre de fois le chasseur atteint son but en utilisant les deux cartouches l'une après l'autre ».

01. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ (ensemble des valeurs de X).

02. Montrer que : $p(X = 1) = \frac{8}{25}$.

03. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

04. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

2^{ème} expérience :

- Le chasseur utilise un cartouches de catégorie A puis une cartouche de catégorie B pour atteint son but .
- On considère les deux événements suivants :
 - ❖ **C** « Le chasseur atteint son but en utilisant A et aussi par B »
 - ❖ **D** « Le chasseur atteint son but au moins une fois en utilisant A puis B »

01. Calculer : $p(C)$ et $p(D)$.

3^{ème} expérience :

- Le chasseur possède un sac qui contient 3 cartouches de la catégorie A et 4 cartouches de la catégorie B tel que les cartouches sont indiscernables au touche .
- Le chasseur tire du sac simultanément deux cartouches puis il utilise les deux cartouches sans intervenir l'ordre pendant l'utilisation des deux cartouches .

01. Calculer la probabilité de l'événement **E** « Le chasseur tire deux cartouches du catégorie A » .

02. Calculer la probabilité de l'événement **F** « Le chasseur tire deux cartouches de catégorie différents »

03. Montrer que la probabilité de de l'événement **G** « Le chasseur atteint son but deux fois » est

$$p(G) = \frac{328}{700}.$$

4^{ème} expérience :

01. Le chasseur répète la **troisième expérience** (**3^{ème} expérience**) quatre fois tel que chaque fois le chasseur remet les deux cartouches tirées au sac avant de répéter l'expérience une autre fois .

- On considère la variable aléatoire Y définie par « le nombre de fois l'événement **F** est réalisé lorsqu'on répète l'expérience précédent quatre fois »
 - a. Comment on appelle la variable aléatoire Y et on précise ses paramètres .
 - b. Donner l'ensemble $Y(\Omega)$ (ensemble des valeurs de Y) .
 - c. Donner $p(Y = k)$ avec $k \in X(\Omega)$.
 - d. Calculer : l'espérance mathématique $E(Y)$; la variance $V(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$.

04

1^{ère} PARTIE :

On considère l'équation différentielle suivante : $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$ tel que la fonction y définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

01. Montrer que la fonction : $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est solution de l'équation (E) .

02. On pose : $y = z + h$ tel que Z est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

- a. Montrer que : si y est solution de l'équation (E) alors z est solution de l'équation $z' - 2z = 0$.
- b. Montrer que : si z est solution de l'équation $z' - 2z = 0$ alors y est solution de l'équation (E) .
- c. Ecrire l'équivalence obtenue .
- d. Résoudre l'équation : $(E') : z' - 2z = 0$ puis déduis les solutions de l'équation (E) .

e. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

2^{ème} PARTIE

- Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + (2x - 1)e^{2x}$.
- (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité de mesure 3 cm. (sur l'annexe 2 voir page 4)

01.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $1 - f(x) \geq 0$.
- Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

02.

- Calculer la fonction dérivée de f et vérifie que $f'(x) = 4xe^{2x}$.
- Donner le signe de f' puis donner le tableau de variation de f .
- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 0$.

03.

- Vérifier que la fonction dérivée seconde de f est : $f''(x) = 4(2x + 1)e^{2x}$.
- Etudier le signe f'' puis donner la concavité de (C_f) et préciser les points d'inflexions de la courbe (C_f) .

04.

Le tableau ci-contre donner le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$ tel que : $0,32 < \alpha < 0,33$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-	+

- Construire la courbe (C_f) de f et la droite (Δ) d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité de mesure 1 cm. (la construction sera sur l'annexe 1 voir page 4).

05.

Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

- Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine.
- Construire la courbe $(C_{g^{-1}})$ de la fonction réciproque g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Calculer $g(\alpha)$; puis montrer que g^{-1} est dérivable en α et calculer $(g^{-1})'(\alpha)$.

06.

- On utilise une intégration par partie montrer que : $\int_{-1}^0 (2x - 1)e^{2x} dx = -1 + \frac{2}{e^2}$.
- Colorer en vert la partie du plan comprise entre la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y = 1$ et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ puis calculer en cm^2 l'aire (la surface).

07. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$.

a. Soit la fonction $F(x) = \frac{8x^2 - 12x + 5}{8} e^{4x}$ vérifie que : $F'(x) = (2x - 1)^2 e^{4x}$.

b. Calculer en cm^3 le volume V du solide obtenue par la rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-1, 0]$.

3^{ième} PARTIE :

01. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = (2u_n - 1)e^{2u_n} + 1 ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a. Ecrire la suite (u_n) en fonction de la fonction f .

b.

c. Montrer que $f([0, \alpha]) \subset [0, \alpha]$.

d. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq \alpha$.

e. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

f. On déduit que (u_n) est une suite convergente.

g. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

